Ref : OAp. 110
140

Développement - Base hilbertienne des polygômes orthogonaux :

leçons 201 234
213 239
207 250
245

Soit I intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle $p : I \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction poids si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \, p(x) \, dx < +\infty . \quad (*)$$

On note $L^2(I,p)$ l'espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_p = \int_I f(x) \overline{g(x)} \cdot p(x) \, dx .$$

Remarquons déjà que par $(*)$, tout polynôme est dans $L^2(I,p)$:
En effet $\|x^n\|_2^2 = \int_I |x^n|^2 p(x) \, dx = \int_I |x^{2n}| \, p(x) \, dx = \| x^{2n} \|_1 < +\infty$.

Ainsi, l'algorithme de Graam Schmidt nous exhibe une famille de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de degrés échellonés et orthogonaux dans $L^2(I,p)$, et cette famille a du sens. (et de norme 1)

Théorème :

Soit $\alpha > 0$ tq $\int_I e^{\alpha|x|} p(x) \, dx < +\infty$. Alors $(P_n)_{n \geq 1}$ base hilbertienne de $L^2(I,p)$.

La famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormée. Il suffit donc de mq $\overline{\operatorname{Vect}\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = L^2(I,p)$.
Or, $\operatorname{Vect}\{x^n ; n \in \mathbb{N}\} = \operatorname{Vect}\{P_n ; n \in \mathbb{N}\}$. Ainsi il suffit de montrer que $\operatorname{Vect}\{x^n ; n\in\mathbb{N}\}$ est une famille totale, i.e. $\overline{\operatorname{Vect}\{x^n ; n \in \mathbb{N}\}} = L^2(I,p)$.

$1 \in L^2(I,p)$ donc $\int_I p(x) \, dx < +\infty$. Ainsi, la mesure de densité p sur I est finie et $L^2(I,p) \subset L^1(I,p)$.

Soit $f \in L^2(I,p)$. $\forall x \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(x) := \begin{cases} f(x) \, p(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

φ est donc intégrable (en effet : $\forall t > 0$, $t \leq \frac{1+t^2}{2}$. Donc $f(x) \leq \frac{1 + f(x)^2}{2}$
et donc $f(x) \, p(x) \leq \underbrace{\frac{1}{2} p(x)}_{\in L^1(I)} + \underbrace{\frac{1}{2} f(x)^2 \, p(x)}_{\in L^1(I) \text{ car } f \in L^2(I,p)}$). On peut donc considérer sa transformée de Fourier :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \; \hat{\varphi}(\xi) = \int_I f(x) \, p(x) \cdot e^{-ix\xi} \, dx$$

▶ Mq $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fct holomorphe sur $B_\alpha := \{z \in \mathbb{C} ; |\operatorname{Im} z| < \frac{\alpha}{2}\}$:

Soit $g : I \times B_\alpha \to \mathbb{C}$
$(x, z) \mapsto f(x)\, p(x)\, e^{-ixz}$

Fixons $z = a + ib \in B_\alpha$, on a :

$|g(x,z)| = |f(x)|.\, p(x).\, e^{Re(ixz)} = |f(x)|.\, p(x).\, e^{bx} < |f(x)|.\, p(x).\, e^{\frac{\alpha}{2}.|x|}$

Or, par Cauchy Schwarz, $\int_I e^{\frac{\alpha}{2}|x|} . |f(x)|\, p(x)\, dx \leqslant \left(\int_I e^{\alpha |x|} p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\int_I |f(x)|^2 p(x) dx\right)^{\frac{1}{2}}$
$< +\infty$

donc $g(x,z)$ intégrable sur I, $\forall z \in B_\alpha$.

* $x \mapsto g(x, z)$ mesurable
* $z \mapsto g(x, z)$ holomorphe
* $x \mapsto |g(x,z)| \leqslant \underbrace{|f(x)|.\, p(x).\, e^{\frac{\alpha}{2}|x|}}_{h(x)} \in L^1(I)$ par paragraphe précédent

Ainsi par le théorème d'holomorphie sous l'intégrale,

$F : z \mapsto \int_I g(x,z)\, dz$ holomorphe et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F^{(n)}(z) = \int_I (-ix)^n g(x,z)\, dx$.

Bien sûr, F prolonge $\hat{\varphi}$ à B_α en une fonction holomorphe.

▶ Conclusion :

Soit $f \in \operatorname{Vect}\{x^n ; n \in \mathbb{N}\}^\perp$. Alors :

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n . \int_I x^n . g(x,0)\, dx = (-i)^n \int_I x^n f(x)\, p(x)\, dx$$
$$= (-i)^n . \langle x^n, f(x) \rangle_p$$
$$= 0$$

Par unicité du prolongement analytique, on a $F = 0$ sur B_α (car B_α connexe)

et donc $\hat{\varphi} = 0$ sur $\mathbb{R}$, donc $\varphi = 0$ par injectivité de la TF.

Or p supposé strictement positif, donc $f = 0$ pp sur I.

Ainsi $f = 0 \in L^2(I, p)$ donc $\operatorname{Vect}\{x^n ; n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$ ∎